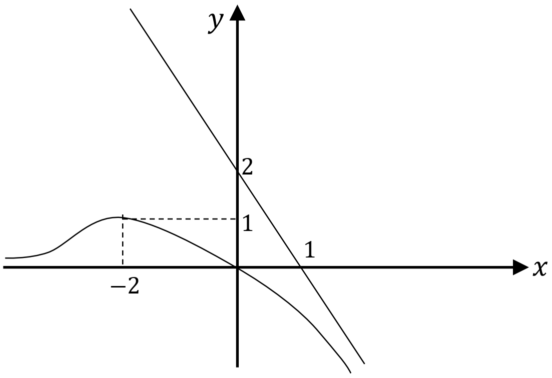
ورقة عمل في مادة الرياضيات (2)

الصف الثالث الثانوي العلمي (2019 - 2020)

أولاً) أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: في الشكل المجاور C الخط البياني للتابع f

1) أوجد D مجموعة تعريف التابع f ومستقره الفعلي $f(D)$

$$D_f = R$$

$$f(D) =]-\infty, 1]$$

2) أوجد $f(0)$, $\grave{f}(-2)$

$$f(0) = 0 \quad , \quad \grave{f}(-2) = 0$$

3) أوجد معادلة كل مقارب للخط البياني C للتابع f

معادلة المقارب المائل تحقق $y = mx + p$ ونلاحظ أنه يمر بالنقطتين: $(0,2)$ $(1,0)$

$$m = \frac{2-0}{0-1} = -2$$

$$y = -2x + p$$

$$0 = -2 + p \quad \Longrightarrow \quad p = 2$$

$$\boxed{y = -2x + 2}$$

$y = 0$ مقارب أفقي منطبق على xx' عند $-\infty$

....

السؤال الثاني: عين في منشور $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ الحد الذي يحوي x

$$T_r = \binom{10}{r}(x)^{10-r}\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right)^r$$

$$= \binom{10}{r}x^{10-r}(-1)^r(x)^{\frac{-1}{2}r} = \binom{10}{r}(-1)^r\,x^{10-\frac{3}{2}r}$$

الحد الذي يحوي x:

$$x^{10-\frac{3}{2}r} = x$$

$$10 - \frac{3}{2}r = 1$$

$$\frac{3}{2}r = 9 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{r = 6}$$ الحد السابع

$$T_6 = \binom{10}{6}(-1)^6 x$$

$$T_6 = \binom{10}{6}x$$

<u>السؤال الثالث:</u> حل المعادلة الآتية: $e^{3x+1}+4e^{2x+1}-5e^{x+1}=0$

$$e^{x+1}(e^{2x}+4e^{x}-5)=0$$

$$e^{x+1}(e^{x}+5)(e^{x}-1)=0$$

إما $e^{x+1}=0$ (مرفوض)

أو $e^{x}=-5$ (مرفوض)

أو $e^{x}=1 \Longrightarrow \boxed{x=0}$

....

<u>السؤال الرابع:</u> لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق:

$$\boldsymbol{u_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ \ldots\ldots\ldots.+\frac{1}{2n-1}}$$

ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$

$$u_{n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ \ldots\ldots\ldots.+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1-2}{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

$$=\frac{-1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

$$=\frac{-2n-1+2n}{(2n)(2n+1)}$$

$$=\frac{-1}{2n(2n+1)}<0$$

متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذو الدليل $n=1$

....

ثانياً) حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

<u>السؤال الخامس: التمرين الأول:</u> نتأمل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq0}$, $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق:

$$\boldsymbol{\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2u_n+1}\end{cases}}\qquad,\qquad \boldsymbol{v_n=\frac{1}{u_n}+1}$$

1) أثبت أن $u_n>0$ أياً يكن العدد الطبيعي n

- نثبت صحة العلاقة من أجل $n=0$:

$L_1=u_0=1\ >\ 0=L_2$ محققة

- نفرض صحة العلاقة من أجل n : $u_n>0$
- نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$: $u_{n+1}\overset{?}{>}0$

من الفرض :

$$\begin{cases}u_n>0\\ 2u_n>0\end{cases}\Longrightarrow 2u_n+1>0 \quad\Longleftarrow\quad u_{n+1}=\frac{u_n}{2u_n+1}>0$$ محققة

2) أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية ثم اكتب v_n بدلالة n

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} + 1 - \frac{1}{u_n} - 1$$
$$= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n + 1}{u_n} - \frac{1}{u_n}$$
$$= \frac{2u_n}{u_n} = 2 \Rightarrow \boxed{r = 2} \text{ حسابية } (v_n)_{n\geq 0}$$

$$\boxed{v_n = 2 + 2n} \Leftarrow \begin{cases} v_0 = \dfrac{1}{u_0} + 1 \\ v_0 = 2 \end{cases} \Leftarrow v_n = v_0 + nr$$

3) استنتج u_n بدلالة n

$$v_n = \frac{1}{u_n} + 1$$
$$v_n - 1 = \frac{1}{u_n}$$
$$u_n = \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1}{2 + 2n - 1}$$
$$u_n = \frac{1}{1 + 2n}$$

....

السؤال السادس: التمرين الثاني: يحوي صندوق أربع بطاقات متماثلة مرقمة: **7 , 4 , 2 , 1** نسحب من الصندوق في آن معاً ثلاث بطاقات:

1) ما عدد النتائج الممكنة لهذا السحب؟

$$\binom{4}{3} = 4$$

2) ما عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العددان **7 , 2**

$$\binom{1}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1} = 2$$

3) ما عدد النتائج الممكنة التي يكون مجموع أرقام البطاقات عدداً فردياً

$$\binom{2}{2}\binom{2}{1} = 2 \qquad \{\text{ف , ف , ز}\}$$

....

السؤال السابع: التمرين الثالث: لتكن لدينا المعادلة $(E): \quad Z^2 - (\sqrt{3} + 3i)Z - 2 + 2\sqrt{3}i = 0$

أولاً: a. اكتب بالشكل الجبري العدد $(\sqrt{3} - i)^2$

$$w^2 = (\sqrt{3} - i)^2 = 3 - 2\sqrt{3}\, i - 1 = 2 - 2\sqrt{3}\, i$$

b. حل المعادلة (E) .

$$\Delta = (\sqrt{3} + 3i)^2 - 4(-2 + 2\sqrt{3}\, i)$$
$$= -6 + 6\sqrt{3}\, i + 8 - 8\sqrt{3}\, i$$
$$= 2 - 2\sqrt{3}\, i$$

$$\Delta = w^2 \qquad \Longrightarrow \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{3} - i$$
$$-\sqrt{\Delta} = -\sqrt{3} + i$$

$$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{3} + 3i + \sqrt{3} - i}{2}$$
$$= \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$$
$$Z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{3} + 3i - \sqrt{3} + i}{2} = \frac{4i}{2} = 2i$$

<u>ثانياً:</u> لتكن $C\,,A\,,B$ نقاط المستوي الممثلة للأعداد العقدية $a = 2i$, $b = \sqrt{3} + i$, $c = \sqrt{3} + 3i$ بالترتيب

1) احسب العدد العقدي $\frac{c-a}{b-a}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC

$$a = 2i \qquad \Longrightarrow \quad A(0,2)$$
$$b = \sqrt{3} + i \qquad \Longrightarrow \quad B(\sqrt{3},1)$$
$$c = \sqrt{3} + 3i \qquad \Longrightarrow \quad C(\sqrt{3},3)$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\sqrt{3} + 3i - 2i}{\sqrt{3} + i - 2i} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i}$$
$$= \frac{2 + 2\sqrt{3}\, i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$
$$= \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = e^{\frac{\pi}{3} i}$$

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg\left(e^{\frac{\pi}{3} i}\right)$$
$$\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \left|e^{\frac{\pi}{3} i}\right|$$
$$\frac{AC}{AB} = 1$$
$$AC = AB$$

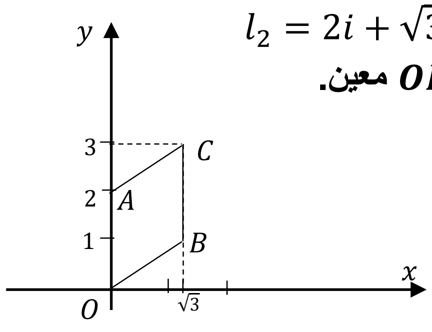
المثلث متساوي الساقين وفيه زاوية $\frac{\pi}{3}$

فالمثلث متساوي الأضلاع

2) تحقق أن $c = a + b$

$$l_2 = 2i + \sqrt{3} + i = \sqrt{3} + i = c$$ محققة

3) وضع النقاط $C\,,B\,,A$ في مستو ، ثم استنتج أن الرباعي $OBCA$ معين.



بما أن $c = a + b$

$$c - b = a - 0$$
$$\boxed{\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}}$$
$$c - a = \sqrt{3} + i$$
$$= b - 0$$
$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}}$$

فالرباعي معين لأن أضلاعه متساوية الطول.

....

<u>السؤال الثامن: التمرين الرابع:</u> نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير – نائب مدير – أمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص، بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة في الحالتين:

1) **لا يوجد شروط**

$$P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

2) **يوجد في المجموعة شخصان متخاصمان لا يجتمعان في اللجنة نفسها.**

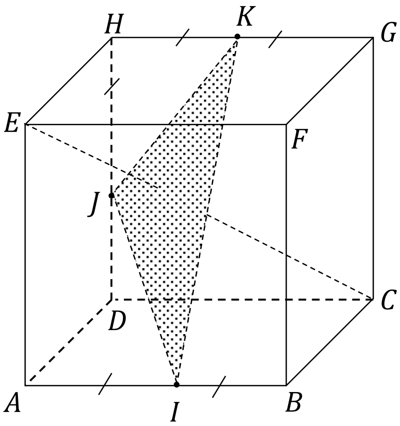
نفترض أن B و A متخاصمان: $\{A, B, C, D, E\}$

الحالات المرفوضة: $(A\,, B\,,$ غ$)$ تتم بـ:

$1 \times 1 \times 3 \times 6 = 18$ طريقة

عدد طرق اختيار اللجنة: $n =$ الحالات الكلية – الحالات المرفوضة

$$n = 60 - 18 = 42$$



ثالثاً) حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

<u>السؤال التاسع: المسألة الأولى:</u> $ABCDEFGH$ مكعب فيه:

I و J و K منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$, $[HD]$, $[HG]$

ولنختر المعلم المتجانس $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

1) **عيّن إحداثيات النقاط التي تمثل رؤوس المكعب**

وإحداثيات النقاط I , J , K

$$A(0,0,0)\ ,\ \ C\,(1,1,0)\ ,\ \ B(1,0,0)\ ,\ \ F(1,0,1)$$

$$D(0,1,0)\ \ ,G(1,1,1)\ ,E(0,0,1)\ ,H(0,1,1)$$

I منتصف AB $\quad I\left(\frac{1}{2}, 0{,}0\right)$

J منتصف HD $\quad J\left(0\,, 1\,, \frac{1}{2}\right)$

K منتصف HG $\quad K\left(\frac{1}{2}\,, 1{,}1\right)$

$$\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}, 1\,, \frac{1}{2}\right) \quad , \quad \overrightarrow{IK}\,(0\,,1{,}1)\,,\ \overrightarrow{JK}\,\left(\frac{1}{2}\,, 0\,, \frac{1}{2}\right)$$

2) **أثبت أن المثلث IJK قائم**

$$\left\|\overrightarrow{IJ}\right\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad \left\|\overrightarrow{IK}\right\| = \sqrt{2} \quad , \quad \left\|\overrightarrow{JK}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حسب عكس فيثاغورث:

$$\left\|\overrightarrow{IK}\right\|^2 \stackrel{?}{=} \left\|\overrightarrow{IJ}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{JK}\right\|^2$$

$$2 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

إذاً المثلث IJK قائم في J

3) بيّن أن المستوي (IJK) يمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[EC]$

$$\overrightarrow{CI}\left(\frac{-1}{2},-1,0\right) \rightarrow \quad \|\overrightarrow{CI}\| = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\overrightarrow{EI}\left(\frac{1}{2},0,-1\right) \rightarrow \quad \|\overrightarrow{EI}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{CI = EI}$$

$$\overrightarrow{CJ}\left(-1,0,\frac{1}{2}\right) \rightarrow \quad \|\overrightarrow{CJ}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\overrightarrow{EJ}\left(0,1,\frac{-1}{2}\right) \rightarrow \quad \|\overrightarrow{EJ}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{CJ = EJ}$$

$$\overrightarrow{CK}\left(\frac{-1}{2},0,1\right) \rightarrow \quad \|\overrightarrow{CK}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\overrightarrow{EK}\left(\frac{1}{2},1,0\right) \rightarrow \quad \|\overrightarrow{EK}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{CK = EK}$$

إذاً (IJK) يمثل مستوي محوري للقطعة المستقيمة $[EC]$

4) اكتب معادلة الكرة التي تقبل $[AB]$ قطراً لها

معادلة الكرة التي تقبل $[AB]$ قطراً لها، مركز الكرة هو منتصف AB أي هو I

نصف قطر الكرة هي منتصف AB

$$R = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2} \qquad , \qquad I\left(\frac{1}{2},0,0\right)$$

$$\overrightarrow{AB}(1,0,0) \qquad , \qquad R = \frac{1}{2}$$

معادلة الكرة: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$

....

<u>السؤال العاشر: المسألة الثانية:</u> بفرض C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$$

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج كل مقارب للخط C

f معرف واشتقاقي على $R\backslash\{1\}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1+1=2$$

$y=2$ مقارب أفقي يوازي xx' عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1+1=2$$

$y=2$ مقارب أفقي يوازي xx' عند $+\infty$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\frac{1}{0^-}+e^{\frac{1}{0^-}}=-\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي يوازي yy' و C يقع على يسار المقارب

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}+e^{\frac{1}{0^+}}=+\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي يوازي yy' و C يقع على يمين المقارب

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x-1)^2}\;.e^{\frac{1}{x-1}}\;<0$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	2 ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	2

2) أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً على $R\backslash\{1\}$

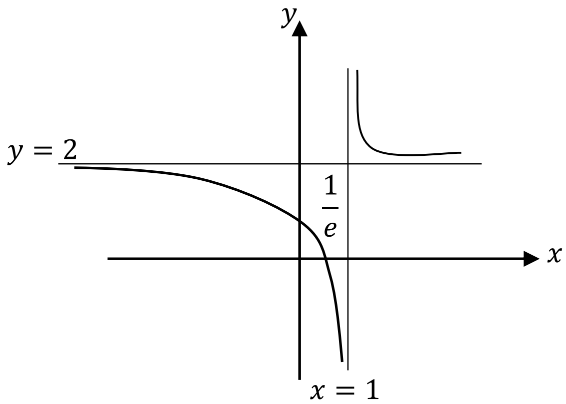
$I_1=]-\infty\,,1[$ f مستمر ومتناقص تماماً على I_1، $0\in f(I_1)=]-\infty\,,2[$ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في I_1

$I_2=]1\,,+\infty[$ f مستمر ومتناقص تماماً على I_2، $0\notin f(I_2)=]2\,,+\infty[$ لا يوجد حلول للمعادلة $f(x)=0$ في I_2

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في $R\backslash\{1\}$ حسب مبرهنات القيمة الوسطى

3) ارسم كل مقارب للخط C ثم ارسم C_f

$$x=0\;:\quad f(0)=\frac{1}{e}$$



4) ناقش بيانياً وبحسب قيم الوسيط λ عدد حلول المعادلة $(1-\lambda)x+(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}+\lambda=0$

$$(1-\lambda)x+(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}+\lambda=0$$
$$x-\lambda x+(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}+\lambda=0$$
$$x+(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}=\lambda x-\lambda$$
$$x+(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}=\lambda(x-1) \qquad \div\, x-1$$
$$\underbrace{\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}}_{f(x)}=\lambda$$

$\lambda \in]-\infty\,,2[$ للمعادلة $f(x)=\lambda$ حل وحيد

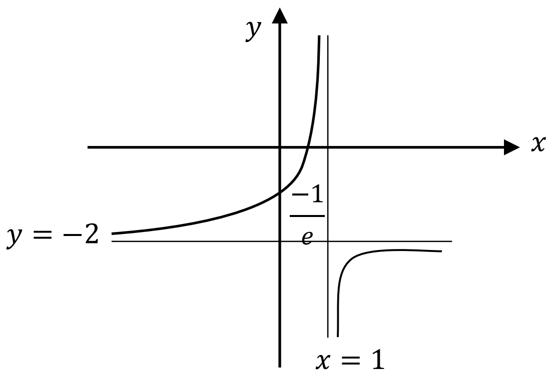
$\lambda=2$ المعادلة مستحيلة الحل

$\lambda \in]2\,,+\infty[$ للمعادلة حل وحيد

5) استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع f_1 المعرف بالعلاقة $f_1(x)=\frac{x}{1-x}-e^{\frac{1}{x-1}}$

$$f_1(x)=\frac{x}{1-x}-e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{x}{-(x-1)}-e^{\frac{1}{x-1}}$$
$$=-\left(\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right)=-f(x)$$

C_1 نظير C بالنسبة لمحور xx'



....

انتهت الأسئلة